

Fonctions continument dérivable

Def Soit f une fonction dérivable sur $x_0 \in I$. Si f' est continue en x_0 , on dit que f est continument dérivable en x_0 .

On écrit $f \in C^1(I)$ $\leftarrow$ l'ensemble des fonctions continument dérivables sur I .

Ex.

• $f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$; $f'(x) = 3x^2 + 8x$

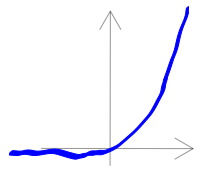
$f \in C^1(\mathbb{R})$

• $f(x) = \sin(x)$; $f'(x) = \cos(x)$

$f \in C^1(\mathbb{R})$

$\uparrow$ continue sur $\mathbb{R}$ ✓

• $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$



f continument dérivable en 0?
 $\hookrightarrow$ (1) dérivable en 0?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = 0; f \text{ est dérivable en } 0$$

et $f'(0) = 0$

$\hookrightarrow$ (2) $f'(x)$ continue en 0?

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

Oui! $f'(x)$ est continue en 0!

Exemple • $f(x) = x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable en 0 ; avec $f'(0) = 0$, mais la dérivée n'est pas continue en 0.

Dérivée de la dérivée

On peut continuer :

Autrement dit :

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \text{ et } f^{(0)} = f$$

- $f(x) = \cos(x)$
 $f'(x) = -\sin(x)$
 $= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

démo par récurrence

$$f''(x) = -\cos(x) \\ = \cos(x + \pi)$$

$$f^{(3)}(x) = \sin(x) \\ = \cos(x + \frac{3\pi}{2})$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x) \\ = \cos(x + 2\pi)$$

En général,

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

Def On note $C^n(I)$ les fonctions différentiables continuellement n fois sur I . On a

$$\cos(x) \in C^n(\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\cos(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Exercices géométrique avec les tangentes

⚠ Jamais confondre la fonction dérivée et l'équation de la tangente!

Équation de la tangente à x_0 :

$$L_y = \underline{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

• Soit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $D_f = [-1; 1]$
Trouver l'équation de la tangente en

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \left[(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right]'$$

$$= \frac{1}{2} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)$$

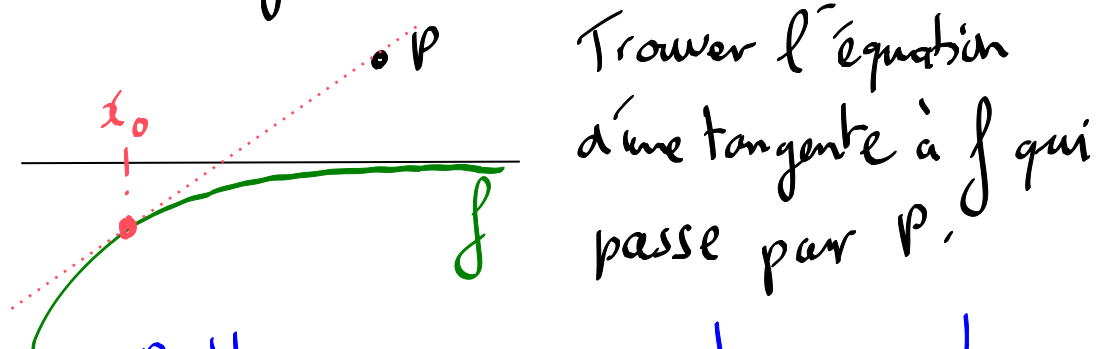
$$= \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

dérivée interne!

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \underline{t: y = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}}$$

• Soit $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ et $P(2; 1)$



Trouver l'équation
d'une tangente à f qui
passe par P .

Problème : on ne connaît pas x_0 !

$$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(passe par $P(2; 1)$)

$$1 = f'(x_0)(2 - x_0) + f(x_0) \quad (*)$$

(x_0) Série 11

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - \sqrt{x^2 + 1})' \\ &= 1 - [(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]' \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$(*) : 1 = \left[1 - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right] (2 - x_0) + x_0 - \sqrt{x_0^2 + 1}$$

$$1 = 2 - x_0 + \frac{x_0^2 - 2x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} + x_0 - \sqrt{x_0^2 + 1}$$

$$-1 = \frac{x_0^2 - 2x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} - \sqrt{x_0^2 + 1}$$

$$-\sqrt{x_0^2 + 1} = x_0^2 - 2x_0 - x_0^2 - 1$$

$$\sqrt{x_0^2 + 1} = 2x_0 + 1$$

$$x_0^2 + 1 = (2x_0 + 1)^2 \text{ et } 2x_0 + 1 \geq 0$$

$$x_0 \geq -\frac{1}{2}$$

$$x_0^2 + 1 = 4x_0^2 + 4x_0 + 1$$

$$3x_0^2 + 4x_0 = 0$$

$$x_0(3x_0 + 4) = 0$$

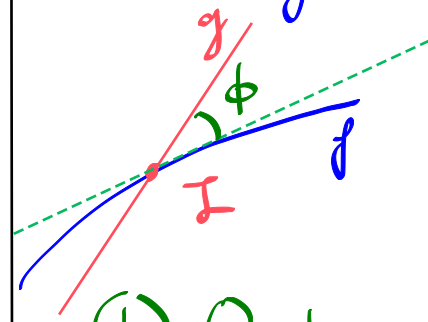
$$S = \{0; -\frac{4}{3}\}$$

$$x_0 = 0; \text{ t: } y = f'(0) \cdot x + f(0)$$

$$y = x - 1$$

pas une sol.
du au Domaine
de pos.

L'angle entre deux courbes est
définies comme l'angle entre
les tangentes à leur point d'intersection



Soit $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 3}{x^2 + 1}$

$$g(x) = 2x - 1$$

① On trouve le point d'intersection

$$\frac{2x^3 - x^2 - 3}{x^2 + 1} = 2x - 1;$$

$$2x^3 - x^2 - 3 = 2x - 1 + 2x^3 - x^2$$

$$2x + 2 = 0; \underline{x = -1}$$

$$I(-1; -3)$$

$$\uparrow g(-1)$$

Exo 6 Série 11

② On trouve les pentes des tangentes à x_0

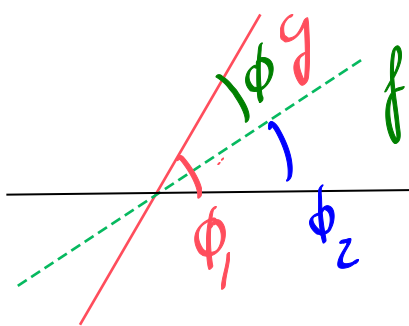
$$y'(x_1) = 2 ; y'(x_0) = \underline{2}$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 2x)(x^2 + 1) - (2x^3 - x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = \frac{16 - 12}{4} = \underline{1}$$

③ On trouve l'angle ϕ

On cherche ϕ tel que



$$\phi = |\phi_1 - \phi_2|$$

où

$$\tan(\phi_1) = y'(x_0) = 2$$

$$\tan(\phi_2) = f'(x_0) = 1$$

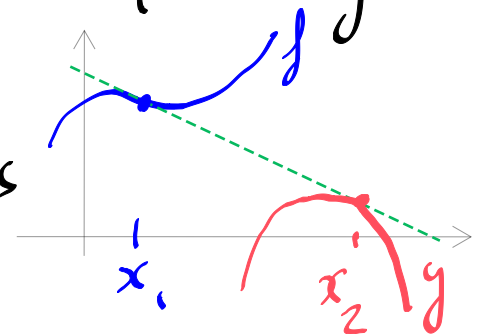
Donc

$$\tan(\phi) = \tan(|\phi_1 - \phi_2|) = |\tan(\phi_1 - \phi_2)|$$

$$= \left| \frac{\tan(\phi_1) - \tan(\phi_2)}{1 + \tan(\phi_1)\tan(\phi_2)} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Pour trouver l'équation $y = mx + h$ d'une tangente à deux courbes



il faut que

$$m = f'(x_1) = g'(x_2) \quad \textcircled{1}$$

$$mx + h \text{ passe par } (x_1; f(x_1)) \quad \textcircled{2}$$

$$mx_1 + h = f(x_1)$$

Exo 5 Série 11

$$mx+h \text{ passe par } (x_2; g(x_2)) \quad \textcircled{3}$$

$$mx_2+h = g(x_2)$$

Soit $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = -x^2 + 6x - 7$

$$\textcircled{1} \quad m = f'(x_1) = g'(x_2)$$

$$m = 2x_1 = -2x_2 + 6$$

$$\textcircled{2} \quad mx_1+h = f(x_1)$$

$$(2x_1)x_1+h = x_1^2 + 2 \quad \textcircled{1}$$

$$h = -x_1^2 + 2$$

$$\textcircled{3} \quad mx_2+h = g(x_2) \quad \textcircled{1}$$

$$(-2x_2+6)x_2+h = -x_2^2+6x_2-7$$

$$h = x_2^2 - 7$$

$$\Rightarrow h = -x_1^2 + 2 = x_2^2 - 7$$

$$\textcircled{1} : x_1 = -x_2 + 3$$

$$-(-x_2+3)^2 + 2 = x_2^2 - 7$$

$$-x_2^2 + 6x_2 - 9 + 2 = x_2^2 - 7$$

$$-2x_2^2 + 6x_2 = 0$$

$$x_2(-2x_2+6) = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2 = 3$$

$$\textcircled{1} : m = 6$$

$$\textcircled{3} : h = -7$$

$$t_1 : y = 6x - 7$$

$$\textcircled{1} : m = 0$$

$$\textcircled{3} : h = 2$$

$$t_2 : y = 2$$

